Approved For Release 2009/08/19 : CIA-RDP88-00904R00010012O

Вторая Международная конференция
Организации Объединенных Наций
по применению атомной энергии
в мирных целях

A/CONF/15/P 2189
USSR
ORIGINAL: RUSSIAN

Не подлежит оглашению до официального сообщения на Конференции

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЙТРОНОВ В ГЕТЕРОГЕННОЙ СРЕДЕ

Н.И.Лалетин

I. Распространение нейтронов в непоглощающей гетерогенной среде

Пусть в бесконечном пространстве имеется периодическая решетка, выполненная из стержней цилиндрической формы (круговые цилиндры, плоские слои и т.д.). Остальное пространство заполнено веществом, отличным от вещества стержней. Будем называть его замедлителем. Если характеризовать среду макросечением взаимодействия нейтронов с веществом $\Sigma(\tau,\theta,\psi)$, то будут иметь место следующие соотношения: $\Sigma(\tau,\theta,\psi)=\Sigma(\tau,\pi-\theta,\psi)$, $\Sigma(\bar{\tau})=\Sigma(\bar{\tau}+\bar{a})$. Здесь угол θ отсчитывается от оси, параллельной образующим цилиндров. Макросечение $\Sigma(\tau,\theta,\psi)$ в стержнях обозначим через Σ_2 и в замедлителе через Σ_1 Будем считать, что поглощение в среде отсутствует. Распределение нейтронов в непоглощающей среде будет описываться решением уравнения Пайерлса в виде:

$$\Phi(\bar{\tau}_0)=\int\frac{\Sigma(\bar{\tau})\Phi(\bar{\tau})\,e^{-\int_{\tau_0}^{\bar{\tau}}\Sigma(\tau')d\tau'}\,\overline{d\tau}}{4\pi|\bar{\tau}-\bar{\tau}_0|^2}\qquad(1)$$

(рассеяние считаем сферически симметричным в обеих средах).

а) Диффузия нейтронов в направлении, параллельном цилиндрам

Поместим бесконечный плоский источник в плоскости $z=-\infty$

Решением уравнения (I) в этом случае будет функция $\Phi(z)=\Phi_0+z\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)_0$, где Φ_0 и $\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)_0$ постоянные.

Действительно, $\int\frac{\Sigma(\tau)e^{-\int\Sigma(\tau')d\tau'}d\bar\tau}{4\pi|\bar\tau-\bar\tau_0|^2}=1$ *), а значения интеграла $\int\frac{\Sigma(\bar\tau)z\,e^{-\int\Sigma(\tau')d\tau'}d\bar\tau}{4\pi|\bar\tau-\bar\tau_0|^2}$, взятого по нижнему и по верхнему полупространству, в силу условия $\Sigma(\theta)=\Sigma(\pi-\theta)$, отличаются только по знаку. Нечетные степени z третьего и более высоких порядков должны быть откинуты, так как решение уравнения (I) должно состоять из постоянного члена и члена, антисимметричного по z в любой точке среды, что возможно лишь при линейной зависимости решения от z. Легко показать также, что функция $\Phi(z)$ не зависит от координат x и y.

Ток нейтронов через элементарную площадку dS с нормалью, параллельной оси z равен

$$I\,dS=\int\frac{\Sigma(\bar\tau)\Phi(\bar\tau)\cos\theta\, e^{-\int_{\bar\tau_0}^{\bar\tau}\Sigma(\tau')d\tau'}d\bar\tau}{4\pi|\bar\tau-\bar\tau_0|^2}\,dS=$$

$$=\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)_0\cdot\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta\int_0^{\infty}\tau\,\Sigma(\bar\tau+\bar\tau_0)\,e^{-\int_0^{\bar\tau+\bar\tau_0}\Sigma(\tau')d\tau'}d\tau\cdot dS. \qquad (2)$$

Эта величина зависит от положения dS в ячейке решетки. Усредняя ток по поперечному сечению ячейки, получим

2921 — 103

$$\bar I=\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)_0\cdot\int_{S_{яч}}\frac{dS}{S_{яч}}\int_{\Omega}\frac{d\Omega\cos^2\theta}{4\pi}\int_0^{\infty}\Sigma(\bar\tau+\bar\tau_0)\,\tau\, e^{-\int_0^{\bar\tau+\bar\tau_0}\Sigma(\tau')d\tau'}d\tau$$

$S_{яч}$ -площадь поперечного сечения ячейки.

Величину $D_{\parallel}=\bar I\Big/\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)_0$ назовем эффективным коэффициентом диффузии для направления, параллельного оси симметрии среды. Порядок интегрирования по углам и по площади ячейки можем, очевидно, поменять местами. Тогда

$$D_{\parallel}=\int_{\Omega}\frac{d\Omega}{4\pi}\cos^2\theta\cdot I(\theta,\varphi) \qquad (3),$$

где

---

*) $\int\frac{\Sigma(\bar\tau)e^{-\int\Sigma(\tau')d\tau'}d\bar\tau}{4\pi|\bar\tau-\bar\tau_0|^2}=\int_{\Omega}\frac{d\Omega}{4\pi}\int_0^{\infty}d\tau\,\Sigma(\bar\tau)e^{-\int_0^{\tau}\Sigma(\tau')d\tau'}=\int_{\Omega}\frac{d\Omega}{4\pi}\left[\int_0^{a_1}\dots+\int_{a_1}^{a_1+a_2}\dots+\int_{a_1+a_2}^{a_1+a_2+a_3}\dots+\right]$,
где a_1, a_2, a_3 и т.д.-последовательные отрезки,которые луч проходит в первой среде, во второй,снова в первой и т.д.Замечая,что $\int_0^{a_1}\Sigma_1 e^{-\Sigma_1\tau}d\tau=1-e^{-\Sigma_1 a_1}$ $\int_{a_1}^{a_1+a_2}\Sigma_2 e^{-\Sigma_1 a_1-\Sigma_2(\tau-a_1)}d\tau_1=e^{-\Sigma_1 a_1}\left(1-e^{-\Sigma_2 a_2}\right)$
и т.д.,видим,что $\int_0^{\infty}\Sigma(\bar\tau)e^{-\int_0^{\tau}\Sigma(\tau')d\tau'}d\tau=1$

$$I(\theta,\varphi)=\int_{S_{яч}}\frac{dS}{S_{яч}}\int_0^\infty \tau\Sigma(\bar\tau+\bar\tau_0)\,e^{-\int_0^{\bar\tau+\bar\tau_0}\Sigma(\tau')d\tau'}d\tau \qquad (4)$$

б) Диффузия нейтронов в направлении, перпендикулярном цилиндрам

Поместим плоский бесконечный источник в плоскости $x=-\infty$. Решение уравнения (I) в этом случае естественно представить в виде $\Phi(\bar\tau)=\Phi_0+\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_0 x+\Delta\Phi(x,y)$. Φ_0 и $\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_0$ -постоянные. Первые два члена решения описывают усредненное по ячейке распределение потока нейтронов в среде, а третий распределение внутри ячейки. Очевидно, что функция $\Delta\Phi(x,y)$ должна быть периодической по координатам x и y, т.е. $\Delta\Phi(x,y)=\Delta\Phi(x+a_x,y)$ и $\Delta\Phi(x,y)=\Delta\Phi(x,y+a_y)$, где a_x и a_y -параметры решетки, соответственно, по осям x и y.

Будем считать, что форма цилиндров такова, что в каждой ячейке имеется хотя бы одна ось симметрии, относительно которой справедливо утверждение $\Sigma(\tau,\theta,\varphi)=\Sigma(\tau,\theta,\varphi+\pi)$. Тогда из уравнения (I) легко заметить, что если начало координат поместить на ось симметрии ячейки, то $\Delta\Phi(x,y)$ должна быть нечетной функцией по x, т.е.

$$\Delta\Phi(x,y)=-\Delta\Phi(-x,y).$$

Функция $\Delta\Phi(x,y)$ определяется уравнением:

$$\Delta\Phi(x_0,y_0)=\int\frac{\Delta\Phi(x,y)\Sigma(\bar\tau)e^{-\int_{\bar\tau_0}^{\bar\tau}\Sigma(\tau')d\tau'}}{4\pi|\bar\tau-\bar\tau_0|^2}\overline{d\tau}+\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_0\int\frac{(x-x_0)\Sigma(\bar\tau)e^{-\int_{\bar\tau_0}^{\bar\tau}\Sigma(\tau')d\tau'}}{4\pi|\bar\tau-\bar\tau_0|^2}\overline{d\tau}\,. \qquad (5)$$

При $\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_0=0$ функция $\Delta\Phi(x,y)$, очевидно, обращается в нуль. При $\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_0\neq 0$ мы можем разделить правую и левую части уравнения (5) на $\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_0$ и, введя обозначение $\varphi(x,y)=\frac{\Delta\Phi(x,y)}{\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_0}$, получим уравнение:

$$\varphi(x_0,y_0)=\int\frac{\varphi(x,y)\Sigma(\bar\tau)e^{-\int_{\bar\tau_0}^{\bar\tau}\Sigma(\tau')d\tau'}}{4\pi|\bar\tau-\bar\tau_0|^2}\overline{d\tau}+\int\frac{(x-x_0)\Sigma(\bar\tau)e^{-\int_{\bar\tau_0}^{\bar\tau}\Sigma(\tau')d\tau'}}{4\pi|\bar\tau-\bar\tau_0|^2}\overline{d\tau}\,.$$

2921-103

Из последнего уравнения видим, что функция $\varphi(x,y)$ уже не зависит от хода усредненного потока. Поэтому общее решение уравнения (I) можем написать в виде:

$$\Phi(\bar{r}) = \Phi_0 + \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_0 x\left[1 + \frac{\varphi(x,y)}{x}\right].$$

Выражение для тока нейтронов через элементарную площадку dS с нормалью параллельной оси $x_{\bar{r}}$ будет иметь вид:

$$I\,dS = \int \frac{\Sigma(\bar{r})\Phi(\bar{r})\sin\theta\cos\varphi\, e^{-\int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}}\Sigma(r')dr'}\,d\bar{r}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}_0|^2}\,dS =$$

$$= \left\{\int_\Omega \frac{d\Omega\sin\theta\cos\varphi}{4\pi}\int_{\bar{r}_0}^{\infty}\Sigma(\bar{r})\Phi_0\, e^{-\int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}}\Sigma(r')dr'}\,dr + \right. \qquad (6)$$

$$\left. + \int_\Omega \frac{d\Omega\sin^2\theta\cos^2\varphi}{4\pi}\int_0^\infty r\Sigma(\bar{r}+\bar{r}_0)\, e^{-\int_0^{\bar{r}+\bar{r}_0}\Sigma(r')dr'}\left[1 + \frac{\varphi(x+x_0, y+y_0)}{x+x_0}\right]dr\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_0\right\} dS.$$

Первый интеграл в фигурных скобках обращается в ноль из-за интегрирования по углу φ (интеграл по dr равен I, см.примечание на стр. 2).

Усредняя (6) по поперечному сечению ячейки, получим

$$\bar{I} = \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_0 \int_{S_{яч}} \frac{dS}{S_{яч}} \int_\Omega \frac{d\Omega\sin^2\theta\cos^2\varphi}{4\pi}\int_0^\infty r\Sigma(\bar{r}+\bar{r}_0)e^{-\int_0^{\bar{r}+\bar{r}_0}\Sigma(r')dr'}\left[1 + \frac{\varphi(x+x_0, y+y_0)}{x+x_0}\right]dr\,.$$

Величина

$$D_x = \bar{I}\Big/\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_0$$

играет роль эффективного коэффициента диффузии в направлении оси x.

Перепишем выражение для D_x в виде:

$$D_x = \int_\Omega \frac{d\Omega\sin^2\theta\cos^2\varphi}{4\pi}\left[I(\theta,\varphi) + I_1(\theta,\varphi)\right]. \qquad (7)$$

Здесь $I(\theta,\varphi)$ – определяется формулой (4), а

$$I_1(\theta,\varphi) = \int_{S_{яч}} \frac{dS}{S_{яч}} \int_0^\infty r\Sigma(\bar{r}+\bar{r}_0)\frac{\varphi(x+x_0, y+y_0)}{x+x_0}\, e^{-\int_0^{\bar{r}+\bar{r}_0}\Sigma(r')dr'}\,dr. \qquad (8)$$

II. Вычисление коэффициентов диффузии для гетерогенной непоглощающей среды

А) Продольная диффузия

Вычислим коэффициент диффузии нейтронов в направлении оси симметрии. Согласно формулам (3) и (4), имеем

$$D_{\parallel}=\int\frac{d\Omega}{4\pi}\cos^2\theta\cdot I(\theta,\varphi);\quad I(\theta,\varphi)=\int\limits_{S_{яч}}\frac{dS}{S_{яч}}\int\limits_0^\infty \Sigma(\bar{\tau}+\bar{\tau}_0)\tau e^{-\int\limits_0^{\bar{\tau}+\bar{\tau}_0}\Sigma(\tau')d\tau'}d\tau$$

Сменив порядок интегрирования в последнем выражении, рассмотрим интеграл по поперечному сечению ячейки. Область интегрирования разобьем на части по следующему признаку. Пусть мы имеем вектор, конец которого может перемещаться по рассматриваемому поперечному сечению, величина равна τ и направление задается углами θ и φ. Поперечное сечение ячейки разобьем на поперечное сечение замедлителя S и поперечное сечение стержня $S_{ст}$. Поперечное сечение замедлителя, в свою очередь, разобьем на следующие части: I) Площадка S_1 такая, что векторы, опирающиеся на нее, не пересекают стержней. 2) Площадка S_2. Векторы, опирающиеся на нее, начинаются в замедлителе и пересекают стержни. Отрезок вектора, лежащий в стержнях, обозначим через X. 3) Площадка S_3. Векторы, опирающиеся на нее, начинаются в стержнях. Отрезок вектора, лежащий в стержнях, обозначим через y.

2921 — 103

Поперечное сечение стержня разобьем на площадку S_4 такую, что векторы, опирающиеся на нее, начинаются в замедлителе и отрезок вектора в стержнях равен y, площадку S_5, на которую опираются векторы, целиком укладывающиеся в одном стержне, и площадку S_6. Векторы, опирающиеся на последнюю, начинаются в других стержнях. Отрезок вектора, лежащий в стержнях равен y.

Интеграл $I(\theta,\varphi)$ запишется теперь следующим образом:

$$I(\theta,\varphi)=\int\limits_0^\infty d\tau\int\limits_{S_1}\frac{dS}{S_{яч}}\left\{\Sigma_1\tau e^{-\Sigma_1\tau}\right\}+\int\limits_0^\infty d\tau\int\limits_{S_2}\frac{dS}{S_{яч}}\left\{\Sigma_1\tau e^{-\Sigma_1(\tau-x)-\Sigma_2 x}\right\}+$$

$$+\int\limits_0^\infty d\tau\int\limits_{S_3}\frac{dS}{S_{яч}}\left\{\Sigma_2\tau e^{-\Sigma_1(\tau-y)-\Sigma_2 y}\right\}+\int\limits_0^\infty d\tau\int\limits_{S_4}\frac{dS}{S_{яч}}\left\{\Sigma_1\tau e^{-\Sigma_1(\tau-y)-\Sigma_2 y}\right\}+$$

$$+\int\limits_0^\infty d\tau\int\limits_{S_5}\frac{dS}{S_{яч}}\left\{\Sigma_2\tau e^{-\Sigma_2\tau}\right\}+\int\limits_0^\infty d\tau\int\limits_{S_6}\frac{dS}{S_{яч}}\left\{\Sigma_2\tau e^{-\Sigma_1(\tau-y)-\Sigma_2 y}\right\}. \qquad (9)$$

Величины $S_1 \div S_6$ легко определить в том случае, когда вектор с длиной, равной средней длине свободного пробега нейтрона в замедлителе, пересекает не больше одного стержня, т.е. $L/\Sigma_1 s \ll 1$. Здесь L – периметр кривой, ограничивающей поперечное сечение стержня.

Заметим, что с каждым элементом длины dL кривой, ограничивающей поперечное сечение стержня, можно связать величину $\psi(x,\varphi)dX$, которая представляет собой отрезок прямой, обладающей следующим свойством. Вектор $\bar{\tau}(\theta,\varphi)$, нормальный к этому отрезку, может иметь максимальную длину в стержне от X до $X+dX$. Тогда площадки $S_1 \div S_6$ выразятся следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&1)\ S_1 = s\left[1 - \frac{\tau}{s}\int_0^\infty \psi(x,\varphi)\sin\theta\, dX\right];\\
&2)\ S_2 = \int_0^\infty \psi(X,\varphi)\sin\theta(\tau - X)\,dX; \qquad dS = \psi(X,\varphi)\sin\theta(\tau - X);\\
&3)\ S_3 = \int_0^\infty \psi(X,\varphi)\sin\theta\, dX\int_0^X dy; \qquad dS = \psi(x,\varphi)\sin\theta\, dX\, dy;\\
&4)\ S_4 = \int_0^\infty \psi(x,\varphi)\sin\theta\, dX\int_0^x dy; \qquad dS = \psi(x,\varphi)\sin\theta\, dX\, dy;\\
&5)\ S_5 = \int_0^\infty \psi(x,\varphi)\sin\theta(x-\tau)\,dx; \qquad dS = \psi(x,\varphi)\sin\theta(x-\tau)\,dX;\\
&6)\ S_6 = 0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Пользуясь соотношениями (I0) и выполняя необходимые операции в формуле (9), получим:

$$
I(\theta,\varphi) = \frac{1}{\Sigma_1(1+p)} + \frac{p}{\Sigma_2(1+p)} - \left(\frac{1}{\Sigma_1} - \frac{1}{\Sigma_2}\right)^2 \frac{\sigma_0(\theta,\varphi) - \sigma(\theta,\varphi,\Sigma_2 R)}{S_{яч}}\,^{*)}. \tag{11}
$$

---

*) При выводе формулы использовано соотношение

$$
\int_0^\infty \psi(x,\varphi)\sin\theta\cdot X\cdot dX = s_{ст}.
$$

Здесь $\sigma(\theta,\varphi,\Sigma_2 R)=\int_0^\infty \psi(x,\varphi)\sin\theta e^{-\Sigma_2 x} dX$,

$$\sigma_0(\theta,\varphi)=\int_0^\infty \psi(x,\varphi)\sin\theta dx$$

R – характерный размер стержня;

$$p=\frac{S_{ст}}{S}.$$

Отсюда для D_{11} получаем выражение:

$$D_{11}=\frac{\lambda_{cp}}{3}\left\{1-\frac{3\bar{\sigma}}{\lambda_{cp}S_{яч}}\left(\frac{1}{\Sigma_1}-\frac{1}{\Sigma_2}\right)^2\left[1-F(\Sigma_2 R)\right]\right\}. \qquad (12)$$

Здесь

$$\lambda_{cp}=\frac{1}{\Sigma_1(1+p)}+\frac{p}{\Sigma_2(1+p)}, \quad \bar{\sigma}=\int_\Omega \frac{d\Omega}{4\pi}\cos^2\theta\,\sigma_0(\theta,\varphi),$$

$$F(t)=\frac{1}{\bar{\sigma}}\int_\Omega \frac{d\Omega}{4\pi}\cos^2\theta\cdot\sigma(\theta,\varphi,t).$$

2921-103

Для случая стержней в виде бесконечных плоских слоев толщины h_2, величины $\bar{\sigma}$ и $F(\Sigma_2 h_2)$ приобретают следующие значения:

$$\sigma(\theta,\varphi,t)=\frac{L}{2}\sin\theta\cos\varphi\, e^{-\frac{t}{\sin\theta\cdot\cos\varphi}}, \quad \bar{\sigma}=\frac{L}{16};$$

$$F(t)=t^4E_5(-t)-t^2E_3(-t), \quad E_n(-t)=\int_\infty^t \frac{e^{-y}dy}{y^n}. \qquad (13)$$

Для стержней в виде круглых цилиндров радиуса R соответствующие величины будут такими:

$$\sigma(\theta,\varphi,t)=\frac{L}{\pi}\sin\theta\int_0^1 du\,\frac{u\,e^{-\frac{2tu}{\sin\theta}}}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \bar{\sigma}=\frac{L}{16}; \qquad (14)$$

$$F(t)=\frac{4}{\pi}\int_1^\infty dv\int_0^1 du\,\frac{u\sqrt{v^2-1}\,e^{-2tuv}}{v^5\sqrt{1-u^2}}, \quad (t=\Sigma_2 R).$$

Заметим, что при $\frac{\lambda_1-\lambda_2}{a}\to 0$ (а - параметр решетки) коэффициент диффузии $D_{\parallel}\to\frac{\lambda_{cp}}{3}$, т.е. к результату, который получается при использовании предположения о справедливости обычного уравнения диффузии и в "замедлителе" и в стержнях (см. 2,3).

Для плоских стержней результат легко получить и в общем случае (без выполнения условия $L/\Sigma_1 s \ll 1$). Это сделано в работе /2/.

Для стержней произвольной формы интеграл $I(\theta,\varphi)$ легко вычислить в другом крайнем случае: тесно расположенных, тонких стержней. Тогда вектор, равный по величине средней длине свободного пробега нейтрона в замедлителе, может пересечь большое количество стержней. Кроме того, можно считать, что вероятность пересечь один стержень в этом случае не зависит от вероятностей пересечь другие стержни.

Для определения величин $S_1\div S_6$ заметим, что имеются следующие возможности:

I. Вектор, величины τ и с направлением (θ,φ) не пересекает стержней. Вероятность этого равна:

$$\frac{s}{S_{яч}}\,e^{-\frac{\tau\sigma_0}{s}}=\frac{S_1}{S_{яч}}$$

II. Вектор начинается в замедлителе, пересекает n стержней и кончается в замедлителе. Обозначим $\tau-X=\rho$ и $x_1,x_2,\ldots,x_n$ отрезки вектора в стержнях $\left(x=\sum_{j=1}^{n}X_j\right)$. Вероятность такого события будет тогда записываться в виде:

$$e^{-\frac{\rho\sigma_0}{s}}\prod_{j=1}^{n}\frac{\rho\psi(x_i,\varphi)\sin\theta}{s}\,\frac{dx_j}{n!}\,\frac{s}{S_{яч}}.$$

Ш. Вектор начинается в стержне, пересекает, кроме того, еще „$n-1$" стержень и кончается в замедлителе. Вероятность этого равна

$$e^{-\frac{\rho\sigma_0}{s}}\prod_{j=1}^{n}\frac{\rho\psi(X_j,\varphi)\sin\theta}{s}\,\frac{dX_j}{(n-1)!}\,\frac{\psi(x_n,\varphi)\sin\theta\,dy}{S_{яч}}$$

(y меняется от 0 до X_n).

IУ. Вектор начинается в стержне, пересекает „$n-1$" стержень и кончается в „n" стержне. Вероятность такая же, как и в пре-

дыдущем случае.

V. Вектор целиком укладывается в одном стержне

$$S_5=\int_0^\infty \psi(x,\varphi)\sin\theta(x-\tau)dx; \quad dS=\psi(x,\varphi)(x-\tau)\sin\theta dx.$$

VI. Вектор начинается в стержне, пересекает еще „$n-2$" стержня и кончается в „n" стержне. Вероятность будет иметь следующий вид:

$$e^{-\frac{\rho\sigma_0}{s}}\prod_{j=1}^{n}\frac{\rho\psi(x_j,\varphi)\sin\theta}{s}\cdot\frac{dx_j}{(n-2)!}\cdot\frac{\psi(x_{n-1},\varphi)\sin\theta dy_1}{s}\cdot\frac{\psi(x_n,\varphi)\sin\theta dy_n}{S_{\text{яч}}}$$

y_1 меняется от 0 до x_{n-1}, а y_n от 0 до x_n.

Учитывая все вышеизложенное, можем записать интеграл $I(\theta,\varphi)$ следующим образом:

$$I(\theta,\varphi)=\int_0^\infty d\tau e^{-\Sigma_1\tau-\frac{\tau\sigma_0}{v}}\Sigma_1\tau\frac{s}{S_{\text{яч}}}+\int_0^\infty dx\frac{\psi(x,\theta,\varphi)}{S_{\text{яч}}}\int_0^x(x-\tau)\tau e^{-\Sigma_2\tau}\Sigma_2 d\tau+$$

$$+\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty d\rho\Sigma_1\frac{s}{S_{\text{яч}}}e^{-\frac{\rho\sigma_0}{v}-\Sigma_1\rho}\int\int_0^\infty\dots\int\Big(\rho+\sum_{j=1}^n x_j\Big)e^{-\Sigma_2\sum_{j=1}^n x_j}\prod_{j=1}^n\frac{\rho\psi(x_j,\theta,\varphi)}{s}\frac{dx_j}{n!}+$$

$$+\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty d\rho\Sigma_2 e^{-\frac{\rho\sigma_0}{v}-\Sigma_1\rho}\int\int_0^\infty\dots\int e^{-\Sigma_2\sum_{j=1}^{n-1}x_j}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{\rho\psi(x_j,\theta,\varphi)}{s}\frac{dx_j}{(n-1)!}\times$$

$$\times\int_0^\infty dx_n\int_0^{x_n}\frac{\psi(x_n,\theta,\varphi)}{S_{\text{яч}}}\Big(\rho+\sum_{j=1}^{n-1}x_j+y\Big)e^{-\Sigma_2 y}dy+\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty d\rho\Sigma_1 e^{-\frac{\rho\sigma_0}{v}-\Sigma_1\rho}\times$$

$$\times\int\int_0^\infty\dots\int e^{-\Sigma_2\sum_{j=1}^{n-1}x_j}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{\rho\psi(x_j,\theta,\varphi)}{s}\frac{dx_j}{(n-1)!}\int_0^\infty dx_n\int_0^{x_n}\frac{\psi(x_n,\theta,\varphi)}{S_{\text{яч}}}\times$$

$$\times\Big(\rho+\sum_{j=1}^{n-1}x_j+y\Big)e^{-\Sigma_2 y}dy+\sum_{n=2}^\infty\int_0^\infty d\rho\Sigma_2 e^{-\frac{\rho\sigma_0}{v}-\Sigma_1\rho}\int\int_0^\infty\dots\int e^{-\Sigma_2\sum_{j=1}^{n-2}x_j}\prod_{j=1}^{n-2}\frac{\rho\psi(x_j,\theta,\varphi)dx_j}{s\,(n-2)!}\times$$

$$\times\int_0^\infty dx_{n-1}\int_0^\infty dx_n\frac{\psi(x_{n-1},\theta,\varphi)\psi(x_n,\theta,\varphi)}{s\,S_{\text{яч}}}\int_0^{x_{n-1}}dy_1\int_0^{x_n}dy_n\Big[e^{-\Sigma_2(y_1+y_n)}\Big(\rho+\sum_{j=1}^{n-2}x_j+y_1+y_n\Big)\Big].$$

2921-103

Выполнив все необходимые операции, получим

$$I(\theta,\varphi)=\lambda_{cp}-\left(\frac{1}{\Sigma_1}-\frac{1}{\Sigma_2}\right)^2\frac{\sigma_0-\sigma}{S_{\text{яч}}\left(1+\frac{\sigma_0-\sigma}{\Sigma_1 v}\right)} \qquad (15)$$

В пределе для очень тонких стержней $\sigma\simeq\sigma_0-\Sigma_2 p s$, и, следовательно, $I(\theta,\varphi)\simeq\frac{1}{\Sigma_{cp}}$; $\left(\Sigma_{cp}=\frac{\Sigma_1+p\Sigma_2}{1+p}\right)$. Эффективный коэффициент диффузии $D_{\parallel}=\int_\Omega I(\theta,\varphi)\cos^2\theta\frac{\sin\theta d\theta d\varphi}{4\pi}$ и в этом случае $D_{\parallel}=\frac{1}{3\Sigma_{cp}}$, т.е. имеет такую же величину, как и для гомогенной

смеси этих же компонент.

Поперечная диффузия

Коэффициент диффузии нейтронов в направлении, перпендикулярном оси симметрии, дается формулами (7) и (8). Величина $I(\theta,\varphi)$ определяется в предыдущем параграфе и поэтому с той частью коэффициента диффузии, в которую входит $I(\theta,\varphi)$, затруднений не возникает. Другая часть коэффициента диффузии с $I_1(\theta,\varphi)$ получается от учета микроструктуры потока нейтронов. Ее вычисление гораздо сложнее.

Для плоских стержней

$$D_\perp'=\int_\Omega \sin^2\theta\cos^2\varphi\, I(\theta,\varphi)\frac{\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{4\pi}=\frac{\lambda_{cp}}{3}\left\{1-\frac{3\bar\sigma_1}{\lambda_{cp}S_{яч}}\left(\frac{1}{\Sigma_1}-\frac{1}{\Sigma_2}\right)^2\left[1-F_1(\Sigma_1 h_1,\Sigma_2 h_2)\right]\right\},$$

$$\bar\sigma_1=\int_\Omega \sigma_0(\theta,\varphi)\sin^2\theta\cos^2\varphi\frac{d\Omega}{4\pi}=\frac{L}{8} \quad \text{и} \quad F_1(x_1,x_2)=2\int_0^1 u^3\,\frac{e^{-\frac{x_1}{u}}+e^{-\frac{x_2}{u}}-2e^{-\frac{x_1+x_2}{u}}}{1-e^{-\frac{x_1+x_2}{u}}}\,du, \tag{16}$$

$D_\perp''=\int\frac{d\Omega}{4\pi}\sin^2\theta\cos^2\varphi\, I_1(\theta,\varphi)$ можно оценить в случае $\Sigma_1 h_1\gg 1$ и $\Sigma_2 h_2\gg 1$.

Тогда внутри каждого слоя можно применять уравнение диффузии и легко определить функцию $\psi(x)$.

$$\psi(x)=\left(\frac{\Sigma(\tau)}{\Sigma_{cp}}-1\right)\left(x-i\,\frac{h_1+h_2}{2}\right). \tag{17}$$

Здесь $\Sigma_{cp}=\dfrac{\Sigma_1 h_1+\Sigma_2 h_2}{h_1+h_2}$; i – номер слоя (см. рисунок).

Тогда $D_\perp''=\int_\Omega\frac{d\Omega}{4\pi}\sin\theta\cos\varphi\int_{S_{яч}}\frac{dS}{S_{яч}}\int_0^\infty\Sigma(\tau)\psi(x)e^{-\int\Sigma(\tau')d\tau'}d\tau=\dfrac{1}{3\Sigma_{cp}}-D_\perp'$

и, следовательно, $\quad D_\perp=D_\perp'+D_\perp''=\dfrac{1}{3\Sigma_{cp}}$ (18)

Покажем, что этот результат будет справедлив при любой толщине слоев. Действительно, описывая распределение потока в среде функцией

$$\Phi(x)=\Psi_0+\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)_0\left[\frac{\Sigma(\tau)}{\Sigma_{cp}}x-i\,\frac{h_1+h_2}{2}\left(\frac{\Sigma(\tau)}{\Sigma_{cp}}-1\right)\right] \tag{19}$$

вычислим односторонние потоки через элементарную площадку с нормалью, параллельной оси x, расположенную на каком-нибудь произвольном расстоянии x_o от центра пластины.

Получим:

$$I_+=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta'\cos\theta' d\theta'}{2}\int_0^\infty d\tau\left\{\psi_o+\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_o\left[\frac{\Sigma(\tilde{\tau})}{\Sigma_{cp}}(\tau\cos\theta'+x_o)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-i\frac{h_1+h_2}{2}\left(\frac{\Sigma(\tilde{\tau})}{\Sigma_{cp}}-1\right)\right]\right\}\Sigma(\tilde{\tau})e^{-\int\Sigma(\tau')d\tau'}d\tau=\frac{\psi_o+\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_o x_o\frac{\Sigma_1}{\Sigma_{cp}}}{4}-$$

$$-\frac{1}{6\Sigma_{cp}}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_o \cdot (20) \qquad I_-=\int_{\pi/2}^{\pi}d\theta'\ldots=\frac{\psi_o+\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_o x_o\frac{\Sigma_1}{\Sigma_{cp}}}{4}+\frac{1}{6\Sigma_{cp}}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_o$$

(θ'-угол радиус-вектора с осью x).

Результирующий поток $I=I_+-I_-=-\frac{1}{3\Sigma_{cp}}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_o$ и не зависит от положения площадки в ячейке.

Теперь если бы $\psi(x)$ была несколько другой антисимметричной относительно центра пластины функцией (например, изображалась бы кривой 2 на рисунке), то ток через площадку dS_1, расположенную у левой границы пластины, получился бы меньше значения $-\frac{1}{3\Sigma_{cp}}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_o$, а через площадку dS_2 больше этой величины, т.е. ток был бы непостоянен по толщине пластины, чего не должно быть, так как поглощение отсутствует. Следовательно, функция $\Phi(x)$, определяемая выражением (I9), является точным решением кинетического уравнения для гетерогенной среды без поглощения, и полученное значение коэффициента диффузии $D_\perp=\frac{1}{3\Sigma_{cp}}$ справедливо для любых толщин пластин.

2921-103

Для случая круглых цилиндрических стержней при выполнении условия $L/\Sigma_1 S \ll 1$ получим

$$D_\perp'=\int\frac{d\Omega}{4\pi}\sin^2\theta\cos^2\varphi I(\theta,\varphi)=\frac{\lambda_{cp}}{3}\left\{1-\frac{3\bar{\sigma}_1}{\lambda_{cp}S_{34}}\left(\frac{1}{\Sigma_1}-\frac{1}{\Sigma_2}\right)^2\left[1-F_\perp(\Sigma_2 R)\right]\right\},$$

где

$$\bar{\sigma}_\perp=\frac{L}{8}=\frac{\pi R}{4} \quad \text{и} \quad F_\perp(x)=\frac{4}{\pi}\int_1^\infty dv\int_0^1 du\,\frac{u e^{-2xuv}}{v^2\sqrt{1-u^2}\sqrt{v^2-1}} \,. \qquad (21)$$

Величину $D_{\perp}''$ оценить трудно даже с функцией $\varphi(x,y)$, полученной при применении уравнения диффузии в каждой среде.

В предельном случае тонких, тесно расположенных стержней, вклад члена $D_{\perp}''$ в коэффициент диффузии для перпендикулярного направления должен, очевидно, падать, и $D_{\perp}$ стремится в этом случае к $D_{\perp}'$. Замечая при этом, что $D_{\perp}'=\int_{\Omega} I(\theta,\varphi)\sin^2\theta\cos^2\varphi\frac{d\Omega}{4\pi}= \simeq\frac{1}{3\Sigma_{cp}}$, видим, что для тонких, тесно расположенных стержней, коэффициент диффузии стремится к значению, которое он имел бы для гомогенной смеси. Таким образом, исчезает анизотропия среды по отношению к распространению нейтронов. Такой вывод противоречит результату работы /3/ и совпадает с результатами работ /2,4/, в которых это показано для частного случая стержней в виде бесконечных плоскостей.

Ш. Учет слабого поглощения

При наличии поглощения уравнение Пайерлса для потока нейтронов запишется в виде:

$$\Phi(\bar{\tau}_0)=\int\frac{\Sigma_s(\bar{\tau})\Phi(\bar{\tau})e^{-\int_{\bar{\tau}_0}^{\bar{\tau}}\Sigma(\bar{\tau}')d\tau'}\,d\tau}{4\pi|\Sigma-\bar{\tau}_0|^2}. \qquad (22)$$

Среды теперь характеризуются сечениями Σ_1,Σ_{a1} и Σ_2,Σ_{a2} соответственно. Σ_{a1} и Σ_{a2} - сечения поглощения, $\Sigma_{s1}=\Sigma_1-\Sigma_{a1}$ и $\Sigma_{s2}=\Sigma_2-\Sigma_{a2}$, соответствующие сечения рассеяния. Симметрия среды, очевидно, не меняется, т.е. для всех сечений справедливы утверждения

$$\Sigma_{a\,s}(\tau,\theta,\varphi)=\Sigma_{a,s}(\tau\,\pi-\theta\,\varphi) \text{ и } \Sigma_{a,s}(\tau,\varphi,\theta)=\Sigma_{a,s}(\tau\,\varphi+\pi\,\theta).$$

Выполняются также и соотношения $\Sigma_{a,s}(\bar{\tau})=\Sigma_{a,s}(\bar{\tau}+\bar{a})$ (в силу периодичности среды).

Рассмотрим случай, когда источник расположен в плоскости $z=-const$, причем $const\gg\lambda_{cp}$. Решение уже не будет линейной функцией от z, и появится периодическая зависимость от переменных x и y. Считаем поглощение слабым $\Sigma_{acp}\cdot\lambda_{cp}\ll 1$. Тогда $\Phi(\bar{\tau})$ будет мало меняющейся функцией z на расстояниях порядка λ_{cp}. Ищем решение в виде $\Phi(\bar{\tau})=\Psi(z)+\Delta\Phi(x,y,z)$. Разлагая $\Psi(z)$ в ряд Тейлора около точки z_0 и ограничиваясь тремя первыми членами разложения, получим из уравнения (22):

$$\Delta\Phi(x_0,y_0,z_0)=\int\frac{\Sigma_s(\vec{\tau})\Delta\Phi(x,y,z)e^{-\int_{\bar{\tau}_0}^{\bar{\tau}}\Sigma(\tau')d\tau'}\,d\tau}{4\pi|\bar{\tau}-\bar{\tau}_0|^2}+$$

$$+\left(\frac{d^2\psi}{dz^2}\right)_0 \int \frac{\Sigma_s(\bar r)(z-z_0)^2 e^{-\int_{\bar r_0}^{\bar r}\Sigma(r')dr'}}{2\cdot 4\pi|\bar r-\bar r_0|^2}\,\overline{dr} - \psi_0\int\frac{\Sigma_0(\bar r)e^{-\int_{\bar r_0}^{\bar r}\Sigma(r')dr'}}{4\pi|\bar r-\bar r_0|^2}\,\overline{dr}. \qquad (23)$$

Это уравнение определяет функцию $\Delta\Phi(x,y,z)$. Видим, что она зависит не только от параметров решетки, но и от хода усредненного потока (Ψ_0 и $\left(\frac{d^2\psi}{dz^2}\right)_0$). Из уравнения (23) видим, что $\Delta\Phi(x,y,z)$ можно записать в виде

$$\Delta\Phi(x,y,z)=\Psi(z)\cdot f\left[x,y,\left(\frac{d^2\psi}{dz^2}\right)_0/\psi_0\right].$$

Ток нейтронов через поперечное сечение ячейки равен:

$$I=\int_{S_{яч}} dS\int\frac{\Sigma_s(\bar r)\Phi(\bar r)\cos\theta\, e^{-\int_{\bar r_0}^{\bar r}\Sigma(r')dr'}}{4\pi|\bar r-\bar r_0|^2}\,\overline{dr}\cong$$

$$\cong\left(\frac{d\psi}{dz}\right)_0 S_{яч}\int_{S_{яч}}\frac{dS}{S_{яч}}\int\frac{\cos^2\theta\,\Sigma_s(\bar r)\, r\,[1+f]\,e^{-\int\Sigma(r')dr'}}{4\pi|\bar r-\bar r_0|^2}\,\overline{dr} = \qquad (24)$$

$$=\left(\frac{d\psi}{dz}\right)_0 S_{яч}\, D\left[\left(\frac{d^2\psi}{dz^2}\right)_0/\psi_0\right].$$

2921-103

Уравнение баланса нейтронов для элемента оъема высотой dz и с основанием $S_{яч}$ напишется в виде:

$$D\left[\frac{d^2\psi}{dz^2}/\psi\right]\frac{d^2\psi}{dz^2}-\Sigma_a\left[\frac{d^2\psi}{dz^2}/\psi\right]\Psi=0. \qquad (25)$$

Здесь

$$\Sigma_a\left(\frac{d^2\psi}{dz^2}/\psi\right)=\int_{S_{яч}}\Sigma_a(\bar r)\left[1+f\left(x,y,\frac{d^2\psi}{dz^2}/\psi\right)\right]\frac{dS}{S_{яч}} \qquad (26)$$

Из уравнения (25) можно определить величину $L_\parallel^2=\frac{\psi}{\frac{d^2\psi}{dz^2}}$, играющую роль квадрата эффективной длины диффузии.

При выполнении условий

$$\int_{S_{яч}}\frac{dS}{S_{яч}}\int\frac{\cos^2\theta\, r\,\Sigma_s(\bar r)\, f\left(x,y,\frac{d^2\psi}{dz^2}/\psi\right)e^{-\int\Sigma(\bar r')dr'}}{4\pi|\bar r-\bar r_0|^2}\,\overline{dr}\ll\int_{S_{яч}}\frac{dS}{S_{яч}}\int\frac{\Sigma_s(\bar r)\cos^2\theta\, r\, e^{-\int\Sigma(r')dr'}}{4\pi|\bar r-\bar r_0|^2}\,\overline{dr}$$

$$\int_{S_{яч}} \Sigma_a(\bar{r})\, f\left(x, y, \frac{d^2\psi}{dz^2}/\psi\right) \frac{dS}{S_{яч}} \ll \int_{S_{яч}} \Sigma_a(\bar{r}) \frac{dS}{S_{яч}} \qquad (27)$$

величины D и Σ_a становятся независимыми от хода усредненного потока, уравнение (25) становится простым уравнением диффузии, где $D_z = \int_{S_{яч}} \frac{dS}{S_{яч}} \int \frac{\Sigma_s(\bar{r}) \cos^2\theta\, r\, e^{-\int \Sigma(\bar{r}')dr'}\, d\bar{r}}{4\pi |\bar{r} - \bar{r}_0|^2}$ и

$$\Sigma_a = \int_{S_{яч}} \Sigma_a(\bar{r}) \frac{dS}{S_{яч}} \qquad (28)$$

играют роль эффективного коэффициента диффузии и сечения поглощения, соответственно.

Квадрат длины диффузии равен $L_{ц}^2 = \frac{D}{\Sigma_a}$.

Рассмотрим теперь диффузию нейтронов в направлении, перпендикулярном оси симметрии, т.е. источник нейтронов расположим в плоскости $x = -const$.

В этом случае ищем решение в виде $\Phi(\bar{r}) = \Psi(x) + \Delta\Phi(x,y)$.

Снова ограничиваясь первыми тремя членами разложения функции $\Psi(x)$ в ряд Тейлора вблизи точки x_0, получим из уравнения (22) уравнение, определяющее функцию $\Delta\Phi(x,y)$:

$$\Delta\Phi(x_0,y_0) = \int \frac{\Sigma_s(\bar{r})\Delta\Phi(x,y) e^{-\int\Sigma(\bar{r}')dr'}\, d\bar{r}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}_0|^2} + \left(\frac{d\psi}{dx}\right)_0 \int \frac{(x-x_0)\Sigma_s(\bar{r}) e^{-\int\Sigma(\bar{r}')dr'}\, d\bar{r}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}_0|^2} +$$

$$+ \left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)_0 \cdot \int \frac{\Sigma_s(\bar{r})(x-x_0)^2 e^{-\int\Sigma(\bar{r}')dr'}\, d\bar{r}}{2\cdot 4\pi|\bar{r}-\bar{r}_0|^2} - \psi_0 \int \frac{\Sigma_a(\bar{r}) e^{-\int\Sigma(\bar{r}')dr'}\, d\bar{r}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}_0|^2}. \qquad (29)$$

Функцию $\Delta\Phi(x,y)$ представим в виде суммы трех функций $\Delta\Phi(x,y) = \Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 + \Delta\Phi_3$, определяемых уравнениями:

$$\Delta\Phi_1(x_0,y_0) = \int \frac{\Sigma(\bar{r})\Delta\Phi_1(\bar{r}) e^{-\int\Sigma(\bar{r}')dr'}\, d\bar{r}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}_0|^2} + \left(\frac{d\psi}{dx}\right)_0 \int \frac{\Sigma(\bar{r})(x-x_0) e^{-\int\Sigma(\bar{r}')dr'}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}_0|^2}, \qquad (30)$$

$$\Delta\Phi_2(x_0,y_0) = \int \frac{\Sigma_s(\bar{r})\Delta\Phi_2 e^{-\int\Sigma(\bar{r}')dr'}\, d\bar{r}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}_0|^2} + \left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)_0 \int \frac{\Sigma_s(\bar{r})(x-x_0)^2 e^{-\int\Sigma(\bar{r}')dr'}\, d\bar{r}}{2\cdot 4\pi|\bar{r}-\bar{r}_0|^2} -$$

$$- \psi_0 \int \frac{\Sigma_a(\bar{r}) e^{-\int\Sigma(\bar{r}')dr'}\, d\bar{r}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}_0|^2},$$

$$\Delta\Phi_3(x_0,y_0)=\int \frac{\Sigma_s(\bar{r})\,\Delta\Phi_3 e^{-\int \Sigma(\bar{r}')dr'}\,\overline{dr}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}_0|^2} -$$

$$-\int \frac{\Sigma_a(\bar{r})\Delta\Phi_1 e^{-\int\Sigma(\bar{r}')dr'}\,\overline{dr}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}_0|^2} - \left(\frac{d\psi}{dx}\right)_0 \int \frac{\Sigma_a(\bar{r})(x-x_0)e^{-\int\Sigma(\bar{r}')dr'}\,\overline{dr}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}_0|^2}.$$

Из вида этих уравнений замечаем, что $\Delta\Phi_1(x,y)$ и $\Delta\Phi_3(x,y)$ нечетные функции x относительно центра ячейки, а $\Delta\Phi_2(x,y)$ четная функция x относительно центра. Кроме того, видим, что функция $\Delta\Phi_1(x,y)$ совпадает с функцией, определяемой уравнением (5) в случае среды без поглощения, а функция $\Delta\Phi_2(x,y)$ аналогична функции $\Delta\Phi(x,y)$, определяемой уравнением (23) для диффузии нейтронов в направлении, параллельном оси симметрии. Из уравнений (30) видим также, что функции $\Delta\Phi_1, \Delta\Phi_2, \Delta\Phi_3$ можно записать в виде:

2921 – 103

$$\Delta\Phi_1=\frac{d\psi}{dx}\varphi(x,y),\ \Delta\Phi_2(x,y)=\Psi\, f\!\left(x,y,\frac{d^2\psi}{dx^2}/\psi\right),\ \Delta\Phi_3=\frac{d\psi}{dx}\,q(x,y).$$

Ток нейтронов через элементарную площадку dS' с нормалью, параллельной оси x, запишется в виде:

$$I\,dS=\int \frac{\Sigma_s(\bar{r})\Phi(\bar{r})\sin\theta\cos\varphi\, e^{-\int\Sigma(\bar{r}')dr'}\,\overline{dr}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}_0|^2}\,dS \cong$$

$$\cong\int \frac{\Sigma_s(\bar{r})\Psi(\bar{r})(1+f)\sin\theta\cos\varphi\cdot e^{-\int\Sigma(\bar{r}')dr'}\,\overline{dr}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}_0|^2}\,dS +$$

$$+\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_0\int \frac{\Sigma_s(\bar{r})\sin^2\theta\cos^2\varphi\cdot r\left[1+f+\frac{\varphi+q}{x}\right]e^{-\int\Sigma(\bar{r}')dr'}\,\overline{dr}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}_0|^2}\,dS.$$

Полагая, что выполняется не только условие $\frac{\psi}{\frac{d\psi}{dx}} \gg \frac{1}{\Sigma_{cp}}$, но и условие $\frac{\psi}{d\psi/dx} \gg a_x$, где a_x - параметр решетки, усредним ток через площадку dS по поперечному сечению ячейки.

Тогда получим:

$$I=\frac{d\psi}{dx}\int_{S_{яч}}\frac{dS}{S_{яч}}\cdot\int\frac{\Sigma_s(\bar{r})\sin^2\theta\cos^2\varphi\, r\left[1+f+\frac{\varphi+q}{x}\right]e^{-\int\Sigma(\bar{r}')dr'}\,d\bar{r}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}_0|^2}=$$

$$=\frac{d\psi}{dx}D\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\Big/\psi\right). \qquad (31)$$

Уравнение баланса нейтронов для элемента объема с поперечным сечением ячейки в качестве основания и высотой dx будет иметь вид:

$$D\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\Big/\psi\right)\frac{d^2\psi}{dx^2}-\Sigma_a\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\Big/\psi\right)\Psi=0. \qquad (32)$$

Здесь

$$\Sigma_a\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\Big/\psi\right)=\int_{S_{яч}}\Sigma_a(\bar{r})\left[1+f\left(x,y,\frac{d^2\psi}{dx^2}\Big/\psi\right)\right]\frac{dS}{S_{яч}}.$$

Уравнение определяет величину $\psi\Big/\frac{d^2\psi}{dx^2}=L_\perp^2$ – квадрата эффективной длины диффузии в направлении оси x.

При выполнении условий, аналогичных условиям (27) уравнение (32) превращается в обычное уравнение диффузии. Эффективный коэффициент диффузии будет иметь вид:

$$D_x=\int_{S_{яч}}\frac{dS}{S_{яч}}\int\frac{\Sigma_s(\bar{r})\sin^2\theta\cos^2\varphi\, r\left[1+\frac{\varphi+q}{x}\right]e^{-\int\Sigma(\bar{r}')dr'}\,d\bar{r}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}_0|^2} \qquad (33)$$

и эффективное сечение поглощения такое же, как (28)

Квадрат длины диффузии $L_\perp^2=\frac{D_x}{\Sigma_a}$.

IУ. Вычисление коэффициентов диффузии в гетерогенной среде с учетом слабого поглощения

При выполнении условий (27) коэффициент диффузии для направления, параллельного оси симметрии, определяется формулой (28). Проводя вычисления аналогично вычислениям предыдущего параграфа, получим для случая, когда выполняется

условие $L/\Sigma_{,s} \ll 1$:

$$D_{\parallel}=\frac{\frac{\Sigma_{s1}}{\Sigma_1^2}+p\frac{\Sigma_{s2}}{\Sigma_2^2}}{3(1+p)}+\left[\frac{\Sigma_{s1}}{\Sigma_2\Sigma_1^2}+\frac{\Sigma_{s1}}{\Sigma_1\Sigma_2^2}+\frac{\Sigma_{s2}}{\Sigma_2\Sigma_1^2}+\frac{\Sigma_{s2}}{\Sigma_1\Sigma_2^2}-\frac{2\Sigma_{s1}}{\Sigma_1^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{2\Sigma_{s2}}{\Sigma_2^3}\right]\frac{\bar{G}}{S_{яч}}\left[1-F(\Sigma_2R)\right]+\left[\frac{\Sigma_{s2}}{\Sigma_2^2}+\frac{\Sigma_{s1}}{\Sigma_1^2}-\frac{\Sigma_{s1}}{\Sigma_1\Sigma_2}-\frac{\Sigma_{s2}}{\Sigma_1\Sigma_2}\right]F'_{\parallel}(\Sigma_2R). \qquad (34)$$

Здесь

$$F'_{\parallel}(\Sigma_2R)=\frac{1}{S_{яч}}\int_{\Omega}\frac{d\Omega}{4\pi}\cos^2\theta\int_0^{\infty}x\,\psi(x,\theta,\varphi)\,e^{-\Sigma_2x}\,dx\,.$$

В случае плоских стержней

$$F'_{\parallel}(\Sigma_2h_2)=\frac{1}{4}\left[(\Sigma_2h_2)^3E_4(-\Sigma_2h_2)-\Sigma_2h_2E_2(-\Sigma_2h_2)\right]. \qquad (35)$$

Для круглых цилиндрических стержней

$$F'_{\parallel}(\Sigma_2R)=\frac{4}{\pi}\int_1^{\infty}dv\int_0^1du\,\frac{u^2\sqrt{v^2-1}\,e^{-2\Sigma_2Ruv}}{\sqrt{1-u^2}\,v^4}\,. \qquad (36)$$

2921-103

Для направления, перпендикулярного оси симметрии легко можно получить ту часть коэффициента диффузии, которая не связана с микроструктурой потока.

Для случая, когда выполнено условие $\frac{L}{\Sigma_{,s}}\ll 1$, будем иметь:

$$D'_{\perp}=\frac{\left(\frac{\Sigma_{s1}}{\Sigma_1^2}+p\frac{\Sigma_{s2}}{\Sigma_2^2}\right)}{3(1+p)}+\left[\frac{\Sigma_{s1}}{\Sigma_2\Sigma_1^2}+\frac{\Sigma_{s1}}{\Sigma_1\Sigma_2^2}+\frac{\Sigma_{s2}}{\Sigma_2\Sigma_1^2}+\frac{\Sigma_{s2}}{\Sigma_1\Sigma_2^2}-\frac{2\Sigma_{s1}}{\Sigma_1^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{2\Sigma_{s2}}{\Sigma_2^3}\right]\frac{\bar{G}_{\perp}}{S_{яч}}\left[1-F_{\perp}(\Sigma_2R)\right]+\left[\frac{\Sigma_{s2}}{\Sigma_2^2}+\frac{\Sigma_{s1}}{\Sigma_1^2}-\frac{\Sigma_{s1}}{\Sigma_1\Sigma_2}-\frac{\Sigma_2}{\Sigma_1\Sigma_2}\right]F'_{\perp}(\Sigma_2R). \qquad (37)$$

Здесь

$$F'_{\perp}(\Sigma_2R)=\frac{1}{S_{яч}}\int_{\Omega}\frac{d\Omega}{4\pi}\sin^2\theta\cos^2\varphi\int_0^{\infty}\psi(x,\theta,\varphi)\,x\,e^{-x\Sigma_2}\,dx\,.$$

Для плоских стержней

$$F_{\perp}'(t) = -\frac{1}{2} t^3 E_4(-t), \qquad t = \Sigma_2 h_2 . \qquad (38)$$

Для круглых цилиндрических стержней

$$F_{\perp}'(t) = \frac{2}{\pi}\int_1^{\infty} dv \int_0^1 du \frac{u^2 e^{-2tuv}}{\sqrt{1-u^2}\, v^4 \sqrt{v^2-1}}, \qquad t = \Sigma_2 R . \qquad (39)$$

Можно показать, что квадрат длины диффузии нейтронов в направлении, параллельном оси симметрии, $L_{\parallel}^2 = \frac{D_{\parallel}'}{\Sigma_a}$ и часть квадрата длины диффузии в направлении, перпендикулярном оси симметрии, определяемая как $L_{\perp}'^2 = \frac{D_{\perp}'}{\Sigma_a}$, равны $\frac{1}{6}\overline{R_z^2}$ и $\frac{1}{6}\overline{R_x^2}$, соответственно, где $\overline{R_z^2}$ и $\overline{R_x^2}$ - проекции среднего квадрата расстояния, проходимого нейтронами до поглощения. Таким образом, отождествление квадрата длины диффузии нейтронов с $\frac{1}{6}$ среднего квадрата расстояния до поглощения для среды с каналами, которое делается в работе (I), справедливо лишь для диффузии нейтронов в направлении, параллельном оси симметрии, но не для перпендикулярных направлений.

V. Уравнение для распределения тепловых нейтронов в мультиплицирующей гетерогенной среде

Уравнение для распределения тепловых нейтронов в реакторе можно написать следующим образом:

$$\Phi(\bar{\tau}_0) = \int \frac{\Sigma_s(\bar{\tau})\Phi(\bar{\tau}) e^{-\int \Sigma(\bar{\tau}')d\tau'}}{4\pi|\bar{\tau}-\bar{\tau}_0|^2}\overline{d\tau} + \int \frac{\Sigma_{ист}(\bar{\tau})\Phi'(\bar{\tau}) e^{-\int \Sigma(\bar{\tau}')d\tau'}}{4\pi|\bar{\tau}-\bar{\tau}_0|^2}\overline{d\tau}. \qquad (40)$$

Здесь $\Phi'(\bar{\tau})$ - поток надтепловых нейтронов, $\Sigma_{ист}(\bar{\tau})$ - эффективное сечение возникновения тепловых нейтронов.

Решение для потока тепловых нейтронов ищем в виде суммы $\Phi = \Psi + \Delta\Phi$, где Ψ описывает изменение усредненного потока по реактору, а $\Delta\Phi$ - микроструктуру потока по ячейке. Для больших реакторов усредненный поток $\Psi(\bar{\tau})$ будет мало

меняться на расстояниях порядка средней длины свободного пробега. Это утверждение справедливо и для потока $\Phi'(\bar{\tau})$ надтепловых нейтронов (микроструктурой распределения надтепловых нейтронов пренебрегаем, т.к. $\Sigma_{ист}(\bar{\tau})$ практически отлично от нуля только в замедлителе).

Разлагая $\Psi(\bar{\tau})$ и $\Phi'(\bar{\tau})$ в ряд Тейлора вблизи точки $\bar{\tau}_0$ и подставляя это разложение в уравнение (40), получим, ограничиваясь членами разложений первого порядка малости:

$$\Delta\Phi(x_0,y_0)=\int\frac{\Sigma_s(\bar{\tau})\Delta\Phi e^{-\int\Sigma(\bar{\tau}')d\tau'}\,d\bar{\tau}}{4\pi|\bar{\tau}-\bar{\tau}_0|^2}+\Phi_0'\int\frac{\Sigma_{ист}(\bar{\tau})e^{-\int\Sigma(\bar{\tau}')d\tau'}\,d\bar{\tau}}{4\pi|\bar{\tau}-\bar{\tau}_0|^2}-$$
$$-\Psi_0\int\frac{\Sigma_a(\bar{\tau})e^{-\int\Sigma(\bar{\tau}')d\tau'}\,d\bar{\tau}}{4\pi|\bar{\tau}-\bar{\tau}_0|^2}+\int\frac{\Sigma_s(\bar{\tau})(x-x_0)e^{-\int\Sigma(\bar{\tau}')d\tau'}\,d\bar{\tau}}{4\pi|\bar{\tau}-\bar{\tau}_0|^2}\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)_0+\left(\frac{d\Phi'}{dx}\right)_0\times \quad (41)$$
$$\times\int\frac{\Sigma_{ист}(\bar{\tau})(x-x_0)e^{-\int\Sigma(\bar{\tau}')d\tau'}\,d\bar{\tau}}{4\pi|\bar{\tau}-\bar{\tau}_0|^2}+\int\frac{\Sigma_s(\bar{\tau})(y-y_0)e^{-\int\Sigma(\bar{\tau}')d\tau'}\,d\bar{\tau}}{4\pi|\bar{\tau}-\bar{\tau}_0|^2}\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)_0+$$
$$+\left(\frac{d\Phi'}{dy}\right)_0\int\frac{\Sigma_{ист}(\bar{\tau})(y-y_0)e^{-\int\Sigma(\bar{\tau}')d\tau'}\,d\bar{\tau}}{4\pi|\bar{\tau}-\bar{\tau}_0|^2}.$$

2921-103

Это уравнение определяет функцию $\Delta\Phi(x,y)$. Представим эту функцию в виде суммы трех функций, определяемых следующими уравнениями:

$$\Delta\Phi_1^x(x,y)=\int\frac{\Sigma_s(\bar{\tau})\Delta\Phi_1^x e^{-\int\Sigma(\bar{\tau}')d\tau'}\,d\bar{\tau}}{4\pi|\bar{\tau}-\bar{\tau}_0|^2}+\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)_0\int\frac{\Sigma_s(\bar{\tau})(x-x_0)e^{-\int\Sigma(\bar{\tau}')d\tau'}\,d\bar{\tau}}{4\pi|\bar{\tau}-\bar{\tau}_0|^2}+$$
$$+\left(\frac{d\Phi'}{dx}\right)_0\int\frac{\Sigma_{ист}(\bar{\tau})(x-x_0)e^{-\int\Sigma(\bar{\tau}')d\tau'}\,d\bar{\tau}}{4\pi|\bar{\tau}-\bar{\tau}_0|^2}\qquad \Delta\Phi_1^y(x_0,y_0)=\int\frac{\Sigma_s(\bar{\tau})\Delta\Phi_1^y e^{-\int\Sigma(\bar{\tau}')d\tau'}\,d\bar{\tau}}{4\pi(\bar{\tau}-\bar{\tau}_0)^2}+$$
$$+\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)_0\int\frac{\Sigma_s(\bar{\tau})(y-y_0)e^{-\int\Sigma(\bar{\tau}')d\tau'}\,d\bar{\tau}}{4\pi|\bar{\tau}-\bar{\tau}_0|^2}+\left(\frac{d\Phi'}{dy}\right)_0\cdot\int\frac{\Sigma_{ист}(\bar{\tau})(y-y_0)e^{-\int\Sigma(\bar{\tau}')d\tau'}\,d\bar{\tau}}{4\pi|\bar{\tau}-\bar{\tau}_0|^2}\qquad (42)$$
$$\Delta\Phi_2(x_0,y_0)=\int\frac{\Sigma_s(\bar{\tau})\Delta\Phi_2 e^{-\int\Sigma(\bar{\tau}')d\tau'}\,d\bar{\tau}}{4\pi|\bar{\tau}-\bar{\tau}_0|^2}+\Phi_0'\int\frac{\Sigma_{ист}(\bar{\tau})e^{-\int\Sigma(\bar{\tau}')d\tau'}\,d\bar{\tau}}{4\pi|\bar{\tau}-\bar{\tau}_0|^2}-\Psi_0\int\frac{\Sigma_a(\bar{\tau})e^{-\int\Sigma(\bar{\tau}')d\tau'}\,d\bar{\tau}}{4\pi|\bar{\tau}-\bar{\tau}_0|^2}$$

$$\Delta\Phi=\Delta\Phi_1^x+\Delta\Phi_1^y+\Delta\Phi_2.$$

Из вида уравнений легко показать, что $\Delta\Phi_1^x$ – нечетная функция координаты x относительно центра ячейки и четная по y, а $\Delta\Phi_1^y$ – нечетная по y и четная по x. $\Delta\Phi_2$ – четная функция относительно центра ячейки и по x и по y. Кроме того, видим, что эти функции можно представить следующим образом:

$$\Delta\Phi_1^x=\frac{d\Psi}{dx}\xi\left(x,y,\frac{d\Phi'}{dx}\Big/\frac{d\Psi}{dx}\right),\ \Delta\Phi_1^y=\frac{d\Psi}{dy}\xi\left(y,x,\frac{d\Phi'}{dy}\Big/\frac{d\Psi}{dy}\right),\ \Delta\Phi_2=\Psi\cdot f\left(x,y,\frac{\Phi'}{\Psi}\right)\qquad (43)$$

Напишем выражения для усредненных по поперечному сечению ячейки токов нейтронов через элементарные площадки, ориентированные параллельно и перпендикулярно оси симметрии.

$$I_z=\int_{S_{яч}}\frac{dS}{S_{яч}}\int\frac{\Sigma_s(\bar{r})\Phi(\bar{r})\cos\theta\, e^{-\int\Sigma(\bar{r}')dr'}\,d\bar{r}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}_0|^2}\cong\int_{S_{яч}}\frac{dS}{S_{яч}}\int\frac{\Sigma_s(\bar{r})r\cos^2\theta(1+f)\,e^{-\int\Sigma(\bar{r}')dr'}\,d\bar{r}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}_0|^2}\frac{d\psi}{dz}=$$

$$\doteq D_z\cdot\frac{d\psi}{dz},\qquad I_x=\int_{S_{яч}}\frac{dS}{S_{яч}}\int\frac{\Sigma_s(\bar{r})\Phi(\bar{r})\sin\theta\cos\varphi\, e^{-\int\Sigma(\bar{r}')dr'}\,d\bar{r}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}_0|^2}\cong$$

$$\cong\int_{S_{яч}}\frac{dS}{S_{яч}}\int\frac{\Sigma_s(\bar{r})r\cdot\sin^2\theta\cos^2\varphi\left(1+f+\frac{\xi}{x}\right)e^{-\int\Sigma(\bar{r}')dr'}\,d\bar{r}}{4\pi|\bar{r}-\bar{r}_0|^2}\frac{d\psi}{dx}=D_x\frac{d\psi}{dx}.\qquad(44)$$

Теперь, если мы рассмотрим элемент объема высотой dz и с основанием, равным $S_{яч}$, то уравнение баланса нейтронов для него будет иметь вид:

$$D_z\frac{d^2\psi}{dz^2}+D_x\frac{d^2\psi}{dx^2}+D_y\frac{d^2\psi}{dy^2}-\Sigma_a\psi+\Sigma_{ист}\Phi'=0.\qquad(45)$$

Здесь мы использовали условие слабого изменения функции ψ на расстояниях порядка постоянной решетки.

$$\Sigma_a=\int_{S_{яч}}\frac{dS}{S_{яч}}\Sigma_a(\bar{r})\left[1+f\left(x,y,\frac{\Phi'}{\psi}\right)\right].$$

Видим, что, если можно считать отношения $\frac{\Phi'}{\psi}$, $\frac{d\Phi'}{dx}\Big/\frac{d\psi}{dx}$ и $\frac{d\Phi'}{dy}\Big/\frac{d\psi}{dy}$ постоянными по объему реактора, то величины D_i и Σ_a становятся постоянными и уравнение (45) совпадает с уравнением для анизотропного гомогенного реактора с соответствующими характеристиками.

Влияние неравномерности хода потока по ячейке за счет того факта, что поглощение и рождение тепловых нейтронов происходит в разных местах, на величины эффективных коэффициентов диффузии нейтронов может быть грубо оценено, если принять ступенчатый ход потока по ячейке. (Например, принять, что функция $f\left(x,y,\frac{\Phi'}{\psi}\right)=0$ повсюду в замедлителе и равна $f=f_1=const$ в стержне). Тогда для вычисления эффективных коэффициентов диффузии можно воспользоваться формулами 34-39 ,заменяя в них Σ_{s2} на $\Sigma_{s2}(1+f_1)$

З а к л ю ч е н и е

В работе рассмотрено распространение нейтронов одной энергии в гетерогенной среде с цилиндрическими стержнями. Вначале принималось, что поглощение повсюду отсутствует. При этом для направления, параллельного цилиндрам, получена формула для коэффициента диффузии в случае цилиндров произвольного сечения и вычислены коэффициенты диффузии для плоских стержней и круглых цилиндров (формулы I2-I5).

Для перпендикулярного направления показано, что коэффициент диффузии зависит также от распределения потока нейтронов по ячейке и в общем случае отличается от коэффициента диффузии в направлении, параллельном цилиндрам. Лишь в предельном случае тонких, тесно расположенных стержней анизотропия среды по отношению к распространению нейтронов исчезает и коэффициент диффузии для всех направлений равен коэффициенту диффузии для соответствующей гомогенной смеси. Для стержней в виде плоских слоев показано, что коэффициент диффузии для перпендикулярного направления равен коэффициенту диффузии для гомогенной смеси при любой толщине слоев. Для круглых цилиндрических стержней вычислена часть коэффициента диффузии в перпендикулярном направлении, не связанная с распределением нейтронов по ячейке (формула 2I).

2921-103

Далее рассмотрен случай с наличием слабого поглощения и получены формулы для коэффициентов диффузии и длин диффузии (формулы 34-39). Показано, что квадрат длины диффузии в направлении, параллельном цилиндрам, совпадает с $\frac{1}{6}$ проекции среднего квадрата расстояния, проходимого нейтроном до поглощения, на это направление, а для перпендикулярного направления такое совпадение не имеет места.

Показано, что формулы (34-39) могут быть использованы при расчете гетерогенных реакторов достаточно больших размеров.

Л и т е р а т у р а

I. Behrens D.I. The Effect of Holes in a Reacting Material on the Passage of Neutrons" Proceeding of Phys. Soc., 1949, 62, (S.A.) 607

2. Шевелев Я.В. "Диффузия нейтронов в плоской уран-водной решетке". Атомная энергия, 1957, II, 224

3. Spinrad B.I. "Anisotropic Diffusion Lenghts in Diffusion Theory", Journal of Applied Physics,1955, 26, 548

4. Трлифай Л. "Вариационный метод гомогенизации гетерогенной среды". Атомная энергия 1957, II, 231